Pavel Obdržálek, MAII, úkol č. 4

$$\int \frac{x}{x^2+7+\sqrt{x^2+7}}dx \tag{1}$$

Provedeme substituci $u = x^2+7$ ($du = 2xdx$):

$$\int \frac{1}{2}\frac{1}{u+\sqrt{u}}dx$$

Nyní provedeme substituci $v = \sqrt{u}$ ($dv = \frac{1}{2\sqrt{u}}$):

$$\int \frac{v}{v^2+v}dv = \int \frac{1}{v+1}dv$$

Toto je známý integrál:

$$\int \frac{1}{v+1}dv = \log|v+1| + c$$

Zpětnými substitucemi dostáváme:

$$\log(\sqrt{u}+1) + c = \log(\sqrt{x^2+7}) + c$$

$x \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{(\text{tg } x + \text{cotg } x)^2}{\sin^2 x - \cos^2 x}dx \tag{2}$$

Nejprve si upravíme čitatele:

$$\text{tg } x + \text{cotg } x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{1}{\cos x \sin x}$$

Jmenovatele převedeme na:

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \cos 2x$$

Potom integrál bude vypadat:

$$\int \frac{(\text{tg } x + \text{cotg } x)^2}{\sin^2 x - \cos^2 x}dx = \int \frac{\left(\frac{1}{\cos x \sin x}\right)^2}{\cos 2x}dx = 4\int \frac{1}{(\sin(2x))^2\cos(2x)}dx$$

Další úpravou získáváme:

$$4\int \frac{1}{(\sin(2x))^2\cos(2x)}dx = 4\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x(1-\sin^2 2x)}dx$$

Provedeme substituci $u = \sin(2x)$ ($du = 2\cos(2x)dx$):

$$4\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x(1-\sin^2 2x)}dx = 2\int \frac{1}{u^2(1-u^2)}du = -2\int \frac{1}{u^2(u^2-1)}du$$

Převedeme na parciální zlomky:

$$-2\int \frac{1}{u^2(u^2-1)}du = -2\int -\frac{1}{u^2} - \frac{1}{2(u+1)} + \frac{1}{2(u-1)}du$$

To můžeme přepsat jako:

$$2\int \frac{1}{u^2}du + \int \frac{1}{u+1}du - \int \frac{1}{u-1}du$$

A zintegrujeme:

$$-\frac{2}{u} + \log|u+1| + \log|u-1| + c$$

A resubstituujeme:

$$-\frac{2}{u} + \log|u+1| + \log|u-1| + c = -\frac{2}{\sin(2x)} + \log|\sin(2x)+1| + \log|\sin(2x)-1| + c$$

$$x \in \left(-\tfrac{\pi}{4}, 0\right)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx \tag{3}$$

Provedeme substituci $u = e^x$ $(du = e^x dx)$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx = \int \frac{1}{u\sqrt{u+1}}du$$

Provedeme substituci $v = u+1$ $(dv = du)$:

$$\int \frac{1}{u\sqrt{u+1}}du = \int \frac{1}{(v-1)\sqrt{v}}dv$$

Provedeme substituci $w = \sqrt{v}$ $(dw = \frac{1}{2\sqrt{v}}dv)$:

$$\int \frac{1}{(v-1)\sqrt{v}}dv = 2\int \frac{1}{w^2-1}dw = -2\int \frac{1}{1-w^2}dw$$

Což je integrál hyperbolického arctangentu:

$$-2\int \frac{1}{1-w^2}dw = -2\ \mathrm{arctgh}(w) + c$$

Resubstituujeme:

$$-2\ \mathrm{arctgh}(w) + c = -2\ \mathrm{arctgh}(\sqrt{v}) + c = -2\ \mathrm{arctgh}(\sqrt{u+1}) + c = -2\ \mathrm{arctgh}(\sqrt{e^x+1}) + c$$

$$x \in \mathbb{R}$$